

# 基于边缘定向增强的各向异性扩散抑噪方法

谢美华, 王正明

(国防科技大学理学院数学系, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 本文提出了一个新的边缘定向增强扩散模型. 针对现有各向异性扩散方程中, 边缘增强扩散模型不能正确地边缘定向, 而相干增强扩散模型易在光滑处产生虚假边缘的缺点, 本文的模型采用基于非线性光滑算子的边缘定向算子对边缘定向, 并根据边缘的位置和方向设置扩散张量的特征根, 使其在光滑区域沿边缘方向和垂直边缘方向均具有较大值, 而在边缘区域垂直边缘方向值小, 沿边缘方向值大, 从而达到既保护边缘又去除噪声的目的, 在整幅图像上均具有较好的去噪效果. 理论分析和数值计算结果均表明, 本文方法具有比现有扩散去噪方法更好的去噪效果, 同时在峰值信噪比和边缘保护指数方面具有显著优势.

**关键词:** 图像去噪; 偏微分方程; 扩散张量; 特征向量; 特征根; 边缘定向

**中图分类号:** TN957      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0059-06

## Edge-D irected Enhancing Based Anisotropic Diffusion Denoising

X I E M e r h u a , W A N G Z h e n g - m i n g

(*Dept of Mathematics National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China*)

**Abstract** This paper puts forward a new edge-directed enhancing based anisotropic diffusion model. Since edge enhancing diffusion can not get right edge direction and coherence enhancing diffusion often induces false edges in image denoising, our new model adapts a new operator for edge orientation based on nonlinear smoothing operator, and defines eigenvalues on edges' orientation such that the new tensor has large eigenvalues in both gradient direction and edge direction on the slippy region of image, but has small eigenvalues in gradient direction and large eigenvalues in edge direction on the edge region of image. So it can remove noise efficiently and keep edges better at the same time to get good result on the whole image. Both theory analysis and numerical results show that the new model has better denoising results than the known diffusion model, and has higher peak signal to noise ratio and higher edge preserved index.

**Key words** image denoising; partial differential equation; diffusion tensor; eigenvector; eigenvalue; edge orientation

### 1 引言

受硬件、环境、人为等因素的影响, 图像总是不可避免地存在噪声, 这些噪声在较大程度上影响了图像细节的真实情况, 使图像质量降低. 传统的图像去噪方法主要滤除图像的高频成分. 由于图像的细节也分布在高频区域, 所以总是在对噪声进行滤除的同时模糊了图像的边缘.

偏微分方程 (PDE) 方法近几年开始大量应用于图像去噪, 其高质量的处理结果已引起人们的广泛关注<sup>[1-4]</sup>. 其发展主要沿三个方向进行. 第一, 由线性扩散到非线性扩散的转变, 而非线性方程又以 P-M 扩散<sup>[3]</sup>为代表; 第二, 由简单的一类方程到多类方程综合成一个复杂方程的转变, 包括低阶与高阶的综合<sup>[4]</sup>, 正扩散与逆扩散的综

合<sup>[5,6]</sup>, 以及实扩散与复扩散的综合<sup>[7]</sup>等; 第三, 由偏微分方程的一步实现到多步实现的转变, 如各向异性扩散方程<sup>[8,9]</sup>先用线性方程对边缘定向, 再用非线性方程实现沿边缘方向的扩散, 实现了线性方程与非线性方程的结合. 各向异性扩散模型中, 扩散系数在平坦处作用较大, 而在边缘处尽可能沿边缘方向扩散, 因此能较好地解决去噪与边缘保护的矛盾. 目前, 偏微分方程去噪研究的重点仍放在多类方程的综合和偏微分方程的多步实现上. 但是, 由于多类方程的综合往往会增加约束参数的个数和模型的复杂性, 给处理带来较大的麻烦, 所以其前景较偏微分方程的多步实现方法差.

边缘增强扩散和相干增强扩散体现了沿边缘方向扩散大而垂直边缘方向扩散小以保护边缘的思想, 但是, 却

收稿日期: 2004-10-25 修回日期: 2005-08-04

基金项目: 全国优秀博士论文作者专项基金 (No. 200140); 国家自然科学基金 (No. 60272013)

未能获得高质量的去噪效果. 这是因为边缘增强扩散虽然有合理的扩散张量特征根, 却未能正确地边缘定向, 而相干增强扩散能准确确定边缘方向, 但其扩散张量的特征值没有考虑到光滑区域与边缘区域之间的差别, 往往会在光滑区域产生许多虚假边缘, 极大地影响图像的质量. 本文旨在针对边缘增强扩散和相干增强扩散的优缺点建立一个新的边缘定向增强扩散模型.

## 2 偏微分方程去噪模型

### 2.1 基本模型

令  $u_0$  表示一个含噪的灰度图像. 一种对  $u_0(x, y)$  抑噪的方法是求解下面能量函数的极小值

$$E(u) = \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy + \iint_{\Omega} (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy + \iint_{\Omega} (|u_{xx} + u_{yy}|) dx dy \quad (1)$$

其中  $\lambda$  为正则化参数,  $\Omega$  为图像的支撑域. 式(1)中的前一项用以约束去噪图像与原图像的逼近程度, 而后一项用以约束图像的光滑程度.

对极值问题式(1), 应用 Euler 方程, 并引进时间参数  $t$  可转化为求解如下偏微分方程

$$\partial_t u = F[u(x, y, t)] \quad (2)$$

式中  $u(t)$  是随时间演化的图像,  $F: R^2 \rightarrow R$  表示一个特定算法所对应的算子. 根据  $F$  定义的不同可分为线性扩散、非线性扩散、各向异性扩散等. 其中, 线性扩散模型为<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} \partial_t u = C \Delta u \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

这里扩散系数  $C$  为常数. 利用线性方程去噪等价于图像的高斯光滑. 而非线性扩散方程模型中扩散系数是关于梯度  $|\nabla u$  的减函数. P-M 扩散<sup>[3]</sup>方程中扩散系数  $C$  定义为

$$C(|\nabla u|) = l^2 / (l^2 + |\nabla u|^2), \text{ 其中 } l \text{ 为常数} \quad (4)$$

### 2.2 各向异性扩散模型

各向异性扩散采用下述模型

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}(D \nabla u) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $D$  为  $2 \times 2$  的扩散矩阵, 通过构造其特征向量与特征根获得. 在边缘增强扩散中,  $D$  的特征向量与  $\nabla u_0 \odot \nabla u_0 = \nabla u_0 \nabla u_0^T$  相同, 其中  $u_0 = u(\cdot, \cdot, t)^*$ ,  $K_{\delta} K_{\delta}(\cdot)$  为高斯光滑核, 显然这两个特征根分别对应图像的垂直边缘方向和沿边缘方向. 而在文献[8]中边缘增强扩散  $D$  的特征根为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2^2 = l^2 / (l^2 + |\nabla u|^2) \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\lambda_1$  对应沿边缘方向的特征向量,  $\lambda_2$  对应垂直边缘方向的特征向量.

与边缘增强扩散不同, 在相干增强扩散中,  $D$  的特征向量与下述结构算子  $J_{\rho}$  相同<sup>[9]</sup>

$$J_{\rho}(\nabla u_0) = K_{\rho} * (\nabla u_0 \odot \nabla u_0), \quad \rho \geq 0 \quad (7)$$

这显然也对应了图像抑噪后的垂直边缘方向和沿边缘方向. 而  $D$  的特征值取为

$$\lambda_1 = \alpha \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha & \text{if } \mu_1 = \mu_2 \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left[-\frac{C}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\right] & \text{else} \end{cases} \quad (9)$$

$\mu_1, \mu_2$  为  $\nabla u_0 \odot \nabla u_0$  的特征值.  $C$  为大于零的常数,  $\alpha \in (0, 1)$ , 常取一个很小的值.  $\lambda_1$  对应沿边缘方向的特征向量,  $\lambda_2$  对应垂直边缘方向的特征向量.

## 3 边缘定向增强扩散模型

### 3.1 各向异性扩散的性质

定理 1 设  $u_0$  为原始图像,  $D$  为扩散矩阵,  $p_1, p_2$  为其规范正交的特征向量, 分别为图像的垂直边缘方向和沿边缘方向,  $\lambda_1, \lambda_2$  为其相应的特征根, 则利用式(5)对  $u_0$  进行光滑近似于分别以  $\lambda_1, \lambda_2$  的速度沿  $p_1, p_2$  方向光滑.

证 设  $p_1 = (p_{11}, p_{12})^T, p_2 = (p_{21}, p_{22})^T$ , 由于图像的边缘方向在小范围内基本不变, 所以  $p_1, p_2$  在一定范围内取常值, 此时

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda_1 (p_{11}^2 u_{xx} + 2p_{11}p_{12} u_{xy} + p_{12}^2 u_{yy}) \\ &+ \lambda_2 (p_{21}^2 u_{xx} + 2p_{21}p_{22} u_{xy} + p_{22}^2 u_{yy}) \\ &= \lambda_1 \left[ p_{11} \frac{\partial(p_{11} u_x + p_{12} u_y)}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial(p_{11} u_x + p_{12} u_y)}{\partial y} \right] \\ &+ \lambda_2 \left[ p_{21} \frac{\partial(p_{21} u_x + p_{22} u_y)}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial(p_{21} u_x + p_{22} u_y)}{\partial y} \right] \\ &= \lambda_1 \frac{\partial(p_{11} u_x + p_{12} u_y)}{\partial \phi_1} + \lambda_2 \frac{\partial(p_{21} u_x + p_{22} u_y)}{\partial \phi_2} \\ &= \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi_2^2} \end{aligned}$$

因此,  $u$  沿  $p_1, p_2$  方向扩散的速度分别为  $\lambda_1, \lambda_2$ . 定理证毕.

定理 1 表明, 各向异性扩散之所以以图像的垂直边缘方向和沿边缘方向为扩散矩阵的特征向量, 是为了在设置特征根时保证沿边缘方向特征根大, 垂直边缘方向特征根小, 以达到增强边缘的目的.

### 3.2 各向异性扩散方程的优缺点分析

分析上述两种各向异性扩散方程的建模过程可知, 他们都有各自的优缺点.

式(6)表明边缘增强扩散的特征根沿边缘方向取大值, 而垂直边缘方向则随梯度的增大而减小, 因而有保护边缘的作用. 但是边缘增强扩散的边缘定向算子  $\nabla u_0 \odot \nabla u_0$  不能正确地边缘定向. 这是因为图像中存在噪声, 当尺度  $\delta$  取得小时, 不足以抑制噪声, 得到的边缘方向波动大, 而  $\delta$  取得大时, 又会使一些具有相同边缘方向但符号不同的点产生正负抵消. 图 1 右上、左下为  $\delta=0.5$  及  $\delta=5$  时, 根据  $\nabla u_0 \odot \nabla u_0$  对边缘定向的结果, 其中黑色表示该点处存在水平边缘, 白色表示竖直边缘, 而斜向边缘用灰色表示, 颜色越深表示越倾向于水平边缘. 值得注意的是这

里 135°边缘和 45°边缘不能用颜色区分, 因此在图中得不到体现, 但在计算时可以区别. 不难看出, 右上图受噪声影响, 波动很大, 左下图的边缘方向完全不对.

而相干增强扩散采用边缘定向算子  $J_\rho$ , 更有利于确定边缘方向. 这是因为扩散张量  $J_\rho$  中大尺度  $\rho$  作用在  $\nabla u_\delta \odot \nabla u_\delta$  上, 这样不会产生因符号不同所引发的问题. 图 1 右下为  $\delta = 0.4, \rho = 5$  时根据  $J_\rho$  对边缘定向的结果, 对照原图(左), 其定向结果很准确. 但是, 观察式 (8) 可发现特征根  $\lambda_1$  的取值为一个很小的常数  $\alpha$ , 即  $\lambda_1$  的取值总是很小. 而为抑制光滑区域噪声,  $\lambda_2$  的取值在光滑区域会较大, 因此在光滑区域也会沿一个方向扩散, 从而导致虚假边缘的出现.

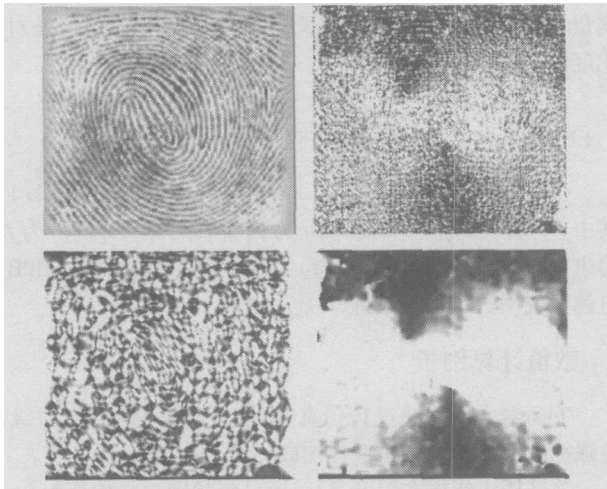


图 1 不同边缘定向算子的边缘定向结果  
左上为原图, 右上与左下为  $\delta = 0.5$  与  $\delta = 5$  时,  
 $\nabla u_\delta \odot \nabla u_\delta$  的定向结果, 右下为  $\delta = 0.4, \rho = 5$  时,  
 $J_\rho$  的定向结果.

### 3.3 特征向量的重构

下面从特征向量与特征根重构的角度出发构造新的扩散张量  $D^*$ . 先考虑特征向量的获取.

图 1 表明边缘定向算子  $J_\rho$  能较好地边缘定向, 但该算子中起主要作用的光滑算子是线性扩散方程, 这往往会将间杂在一大片具有相似边缘方向中的少数其他边缘方向淹没, 如图 2 所示, 图右下角的大片纵向边缘中包含了小段的横向边缘, 但经高斯函数作用后这些小段边缘就被淹没了. 为此, 需采用下面非线性光滑算子作用后的边缘定向算子

$$H_l(\nabla u_\delta) = G(\nabla u_\delta \odot \nabla u_\delta) = \begin{bmatrix} G((u_{\delta x})^2), & G(u_{\delta x} u_{\delta y}) \\ G(u_{\delta x} u_{\delta y}), & G((u_{\delta y})^2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中  $G(\cdot)$  为对应式 (4) 的 P-M 非线性光滑算子, 参数  $l$  即为式 (4) 中的参数  $l$ . 观察图 2 右可发现, 使用非线性算子后, 右下角的小段横向边缘得到了较好的保留. 为使式 (10) 中的参数适用于迭代过程中不断平滑的图像, 将参数

$l$  与  $\delta$  均设为时变的, 得到新的边缘定向算子

$$H_{l(t)}(\nabla u_{\delta(t)}) = G(\nabla u_{\delta(t)} \odot \nabla u_{\delta(t)}) = \begin{bmatrix} G((u_{\delta(t),x})^2), & G(u_{\delta(t),x} u_{\delta(t),y}) \\ G(u_{\delta(t),x} u_{\delta(t),y}), & G((u_{\delta(t),y})^2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

为简单起见, 下面仍将  $H_{l(t)}(\nabla u_{\delta(t)})$  记为  $H_l(\nabla u_\delta)$ .

$D^*$  与  $H_l(\nabla u_\delta)$  有相同的特征向量.

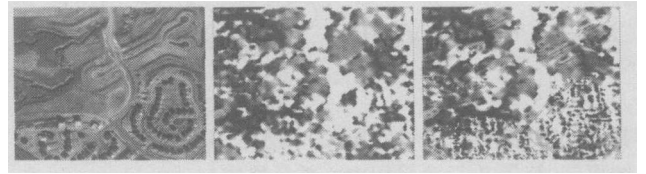


图 2 不同边缘定向算子对遥感图像的边缘定向结果  
左为原图, 中为  $\rho = 5, \delta = 0.529$  时,  $J_\rho(\nabla u_\delta)$  的定向结果,  
右为  $H_l(\nabla u_\delta)$  的定向结果, 图的颜色含义与图 1 同

### 3.4 特征根的重构

根据沿边缘方向扩散的思想, 在光滑区域两个特征根的取值均应大, 在边缘区域垂直边缘方向的特征根小, 而沿边缘方向特征根大, 因此有新特征根

$$\begin{cases} \lambda_1^* = o_1(x, y) c_1 + o_2(x, y) v_1 \\ \lambda_2^* = o_1(x, y) c_2 + o_2(x, y) v_2 \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $c_1, c_2$  分别为光滑区域垂直于边缘方向和沿边缘方向的特征根,  $v_1, v_2$  分别为边缘区域垂直于边缘方向和沿边缘方向的特征根,  $o_1(x, y), o_2(x, y)$  为权函数, 满足

$$\begin{cases} o_1(x, y) \text{ 为梯度 } |\nabla u| \text{ 的减函数, 而 } o_2(x, y) \\ \text{为梯度 } |\nabla u| \text{ 的增函数;} \end{cases} \quad (13-1)$$

$$0 \leq o_1(x, y), o_2(x, y) \leq 1, \quad (13-2)$$

$$\begin{cases} o_2(x, y) = 1 - o_1(x, y); \\ o_1(x, y) \approx 0 \text{ (x, y) 为边缘点; } o_2(x, y) \approx 0 \\ \text{(x, y) 为光滑点.} \end{cases} \quad (13-3)$$

为选取合适的权函数, 必须对边缘正确定位, 一般而言可采用梯度函数作为边缘检测算子, 但是由于图像中含有噪声, 可取高斯平滑后的梯度算子. 从而可将权函数取为

$$o_1(x, y) = \frac{k^2}{k^2 + |\nabla u_\delta|^2}, \quad o_2(x, y) = \frac{|\nabla u_\delta|^2}{k^2 + |\nabla u_\delta|^2} \quad (14)$$

在满足式 (13) 的情况下,  $o_1(x, y)$  可以取很多形式, 如指数形式  $o_1(x, y) = e^{-|\nabla u_\delta|}$  等.

在光滑区域沿两个方向的扩散系数均应大, 因此,  $c_1, c_2$  可取为

$$\begin{cases} c_1 = h^2 / (h^2 + |\nabla u_\delta|^2) \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad (15)$$

在边缘区域沿边缘方向特征根  $v_2$  取值大, 而垂直边缘方向特征根  $v_1$  取值小, 因此,  $v_1, v_2$  可取为

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = 1 - e^{-|\nabla u_\delta|} \end{cases} \quad (16)$$

据此, 可构造以  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  为特征根,  $H_l(\nabla u_\delta)$  的特征向量为

特征向量的扩散张量  $D^*$ . 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(D^* \nabla u), D^* = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \end{pmatrix} \quad (17)$$

事实上, 式 (15)、(16) 中特征根的取值也可以是其他的形式, 只要保证其取值趋势不变.

方程 (17) 的解通过如下迭代过程逼近

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot (\text{div}(D^* \nabla u^n)),$$

$$D^* = (p_1(u^n), p_2(u^n)) \begin{pmatrix} \lambda_1^*(u^n) & 0 \\ 0 & \lambda_2^*(u^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^T(u^n) \\ p_2^T(u^n) \end{pmatrix} \quad (18)$$

其中,  $u^n$  为第  $n$  次迭代结果,  $\Delta t$  为步长,  $D^*$  根据  $u^n$  及时反馈更新. 算子  $\nabla(\cdot)$  采用中心差分格式:

$$\nabla u|_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} \\ u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j} \end{pmatrix} \quad (19)$$

采用对称边界条件:  $u_{0j} = u_{1j}$ ,  $u_{m+1,j} = u_{m,j}$ ,  $u_{i0} = u_{i1}$ ,  $u_{i,n+1} = u_{i,n}$ .

### 3.5 矩阵 $D^*$ 的性质

定理 2 由上述过程获得的扩散张量  $D^*$  具有下述性质:

- (i) 光滑性, 即  $D^* \in C^\infty(R^{2 \times 2})$
- (ii) 对称性, 即任给对称矩阵  $H \in R^{2 \times 2}$ ,  $d_{ij}^f(H) = d_{ji}^f(H)$ ;
- (iii) 一致正定性, 即任给  $w: \Omega \rightarrow R^2$  满足  $|w(x)| \leq K$ ,

$D^*(H_i(w))$  存在一个正的下界  $v(k)$ .

证 (i) 光滑性: 图像  $u$  经过高斯算子光滑后得到的  $u_\delta$  是无穷可微的, 而从式 (12) 中  $H_i(\nabla u_\delta)$  的构造及式 (13) ~ (17) 中  $D^*$  的特征根的构造可知,  $D^*$  的特征向量和特征根都是关于  $u_\delta$  的无穷可微函数, 因此  $D^* \in C^\infty(R^{2 \times 2})$ .

(ii) 对称性: 由式 (18) 对称性显然. (iii) 一致正定性: 从  $\lambda_1^*$ 、 $\lambda_2^*$  定义可知

$$\lambda_1^* = \frac{k^2}{k^2 + w^2} \cdot \frac{h^2}{h^2 + w^2} + \frac{w^2}{k^2 + w^2} \alpha \geq \frac{k^2}{k^2 + w^2} \cdot \frac{h^2}{h^2 + w^2}$$

$$\lambda_2^* = \frac{k^2}{k^2 + w^2} + \frac{w^2}{k^2 + w^2} (1 - e^{-w^2/\delta}) \geq \frac{k^2}{k^2 + w^2}$$

由于  $|w(x)| \leq k$ , 显然,  $\lambda_1^* \geq \frac{k^2}{k^2 + K^2} \cdot \frac{h^2}{h^2 + K^2}$ ,

$\lambda_2^* \geq \frac{k^2}{k^2 + K^2}$ , 定理证毕.

## 4 模型的适定性与边缘保护指数

### 4.1 模型的适定性

与相干增强扩散一样, 边缘定向增强扩散的解具有很好的适定性. 假设  $u_0: \Omega \rightarrow R$  有界,  $\Omega$  为  $m$  维空间, 称为  $u_0$  的支撑域,  $l > 0$ ,  $\delta > 0$  令  $a = \inf_{\Omega} u_0$ ,  $b = \sup_{\Omega} u_0$ , 考虑如下扩散

滤波问题

$$\begin{cases} \partial_t u = \text{div}(D(H_i(\nabla u_\delta)) \nabla u), & x \in \Omega, t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \langle \nabla(H_i(\nabla u_\delta)) \nabla u, n \rangle = 0 & x \in \partial\Omega, t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $n$  为外法线矢量,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为通常的内积, 扩散张量  $D = (d_{ij})$  满足定理 2 所示的三条性质, 则可证明如下定理.

定理 3 (适定性、光滑性、极值原理) 问题 (20) 在分布概念下具有唯一解  $u(x, y, t)$ , 对  $t > 0$  该解具有光滑性质  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$ , 同时, 该解依范数  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  连续依赖于  $u_0(x)$ , 并满足极值原理  $a \leq u(x, t) \leq b$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, \infty)$ .

证 参见文献 [9].

### 4.2 边缘保护指数

由于边缘处的梯度是表征边缘清晰度的主要标志, 为衡量去噪后图像边缘保护的程, 定义如下基于边缘处对比度的边缘保护指数

$$\text{EPE}(u) = -10 \log_{10} \frac{\sum_{(i,j) \in \text{edge}(f)} |\nabla f(i,j) - \nabla u(i,j)|^2}{\text{card}(\text{edge}(f))} \quad (21)$$

其中  $f$  为真实的不含噪图像,  $u$  为去噪后图像,  $\text{edge}(f)$  为  $f$  的边缘点的集合,  $\text{card}(\text{edge}(f))$  为  $f$  的边缘点的个数, EPE 值越大说明边缘保护越好.

## 5 数值计算例子

下面对本文算法进行仿真验证, 并与 P-M 扩散、边缘增强扩散及相干增强扩散作比较.

共采用 4 幅样本图像进行计算, 每幅图上加均值为 0 方差不同的白噪声. 为节省篇幅, 这里只显示其中的 Lena 图 (图 3) 和某光学遥感图像 (图 4), 其余两幅图像为 Mat

lab 图像处理工具箱的自带图像, 处理结果通过峰值信噪比 (见表 1) 和边缘保护指数 (见表 2) 说明.

从图 3 可以看出, P-M 扩散与边缘增强方法明显模糊了帽穗等边缘细节. 相干增强扩散在帽穗处处理得较好, 但是图像的平滑区域如 Lena 的脸上和背景处都



图 3 各种去噪方法的去噪效果图 (Lena 图)

出现了很多虚假条纹。而本文方法处理的结果没有产生虚假条纹,同时帽穗等边缘细节也保持得很好。既较好地去除了噪声,也增强了边缘。图 4 的处理结果与图 3 类似。从表 1 的数值也可看出,对各个图像而言,新方法相对传统方法均具有更高的峰值信噪比。而从表 2 也可看出,P-M 扩散与边缘增强扩散的边缘保护效果差,相干增强扩散较好,边缘定向增强扩散最佳。

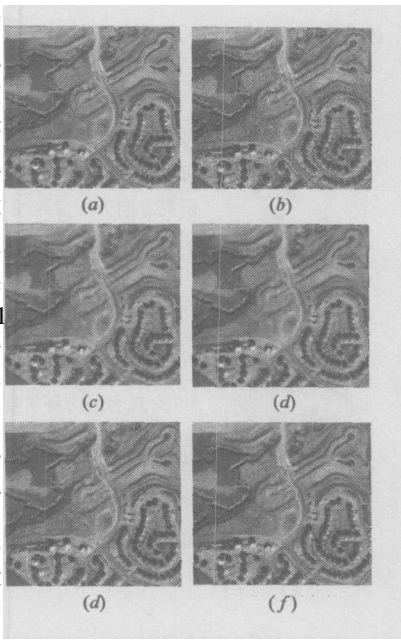


图 4 各种去噪方法的去噪效果图 (遥感图)

表 1 各种去噪方法的峰值信噪比 (dB)

去噪方法	方差	含噪图	P-M	边缘增强	相干增强	边缘定向增强
Lena	25	20.18	28.05	27.80	28.30	29.114
	15	24.60	30.36	30.52	30.23	31.15
遥感图	25	20.18	24.29	23.90	24.21	25.24
	15	24.60	27.60	27.52	27.19	28.10
tree	25	20.17	28.88	28.87	28.43	30.04
	40	16.08	27.00	27.03	26.55	28.00
cameraman	25	20.15	26.80	26.64	25.18	27.58
	40	16.09	24.54	24.53	23.71	25.60

表 2 各种去噪方法的边缘保护指数 (dB)

去噪方法	方差	含噪图	P-M	边缘增强	相干增强	边缘定向增强
Lena	25	27.86	27.60	27.15	29.24	30.12
	15	32.12	30.88	30.93	32.55	32.81
遥感图	25	27.24	24.02	23.34	26.62	27.26
	15	31.01	30.39	29.54	30.88	31.09
tree	25	27.72	30.47	30.43	30.24	31.43
	40	23.35	28.47	28.39	29.14	29.76
cameraman	25	27.81	27.43	27.50	27.18	28.20
	40	23.65	24.86	24.78	25.01	25.64

## 6 结论

本文设计的模型以  $H_1(\nabla u_6)$  为边缘定向算子,克服了原有 P-M 扩散与边缘增强扩散以  $\nabla u_6 \odot \nabla u_6$  为边缘定向算子所带来的边缘定向不准确的缺点,而且在特征根的选取上考虑了不同区域沿边缘方向和垂直边缘方向的差别,使模型更好地适应于图像的局部特征。

总之,新模型继承了现有 P-M 扩散、边缘增强扩散与

相干增强扩散的优点,又克服了各自的缺点。大量的仿真结果证明新方法不但对图像平坦区域具有良好的抑噪效果,而且能起到增强边缘特征的作用。

## 参考文献:

[1] Shih A C, LIAO H M, LU C S. A new iterated two-band diffusion equation: theory and its application [J]. IEEE Transaction on Image Processing 2003, 12 (4): 466-476

[2] Weickert J. A review of nonlinear diffusion filtering [A]. Scale-Space Theory in Computer Vision, LNCS 1252 [C]. Berlin: Springer, 1997: 3-28

[3] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12 (7): 629-639

[4] Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. IEEE Transactions on Image Processing 2003, 12 (12): 1579-1590

[5] Pollak I, Wilsky A, S. Krim H. Image segmentation and edge enhancement with stabilized inverse diffusion equations [J]. IEEE Transaction on Image Processing 2000, 9 (2): 256-266

[6] Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N A. Forward and backward diffusion processes for adaptive image enhancement denoising [J]. IEEE Transaction on Image Processing 2002, 11 (7): 689-703

[7] Gilboa G, Zeevi Y Y, Sochen N A. Complex diffusion process for image filtering [A]. Scale-Space'01, LNCS 2106 [C]. Berlin: Springer-Verlag, 2001: 299-307

[8] Weickert J. Theoretical foundations of an isotropic diffusion in image processing [J]. Computing 1996, 11 (Suppl): 221-236

[9] Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering [J]. International Journal of Computer Vision 1999, 31 (2/3): 111-127

[10] 王岩, 梁甸农, 郭汉伟. 基于改进正则化方法的 SAR 图像增强技术 [J]. 电子学报, 2003, 31 (9): 1307-1309  
WANG Yan, LIAN Dian-long, GUO Han-wei. SAR image enhancement using modified regularization method [J]. Acta Electronica Sinica 2003, 31 (9): 1307-1309 (in Chinese)

[11] 余庆军, 谢胜利. 基于人类视觉系统的各向异性扩散图像平滑算法 [J]. 电子学报, 2004, 32 (1): 17-20  
YU Qing-jun, XIE Sheng-li. An anisotropic diffusion image smoothing method based on human visual system [J]. Acta Electronica Sinica 2004, 32 (1): 17-20 (in Chinese)

- [12] 周宏潮, 朱炬波, 王正明. SAR 图像增强的前向后向扩散方程方法 [ J ]. 电子学报, 2004, 32(12): 2070–2073  
 ZHOU Hong-chaq, ZHU Ju-bo, WANG Zhengming Forward and backward diffusion processes for SAR image enhancement [ J ]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(12): 2070–2073 ( in Chinese )
- [13] 高鑫, 刘来福, 黄海洋. 基于 PDE 和几何曲率流驱动扩散的图像分析与处理 [ J ]. 数学进展, 2003, 32(3): 285–294  
 GAO Xin, LIU Laifu, HUANG Haiyang A survey-image analysis and processing using PDE and geometry curvature-driven diffusion [ J ]. Advances in Mathematics, 2003, 32(3): 285–294 ( in Chinese )

## 作者简介:



谢美华 女, 1976年 8月出生于湖南省宁乡县. 现为国防科学技术大学理学院数学系讲师、博士. 在国内外发表学术论文 20余篇, 主要研究方向为图像处理与实验数据处理.

E-mail: xmhdj@163.com.



王正明 男, 1962年 2月出生于湖南省长沙市. 现为国防科学技术大学理学院院长、博士生导师. 在国内外发表学术论文 80余篇, 主要研究方向为图像处理中的数学方法、装备试验分析与评估.

(上接第 70页)

- [13] Tan Tianle, et al Rough set-based modeling and controller design in an internal model control system [ A ]. 2003 IEEE Inter Conf on Systems Man and Cybernetics [ C ]. Hangzhou, China, 2003. 3559–3563.
- [14] Frank Ruskey. Combinatorial Generation (working ver-

sion) [ M ]. Victoria, Canada: University of Victoria, 2001.

- [15] A Øhrn. Discernibility and rough sets in medicine: tools and applications [ D ]. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, 1999.